$x = r\cos\theta$ $\quad$ r : distance radiale depuis O

$y = r\sin\theta$ $\quad$ θ : angle polaire par rapport à l'axe Ox

Vecteurs unitaires polaires :

$\vec{e}_r$: vecteur radial (direction OM).

$\vec{e}_\theta$: vecteur orthoradial ($\perp$ à $\vec{e}_r$, sens trigonométrique).

Expression en fonction de $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$:

$$\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y$$

Dérivées par rapport à θ ;

$$\boxed{\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta} \; ; \; \boxed{\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r}$$

Cinématique du point en coordonnées polaires.

1) vecteur Position.

$$\boxed{\vec{OM} = r\,\vec{e}_r}$$

2) vecteur vitesse.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}.$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \vec{e}_\theta \times \frac{d\theta}{dt}.$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{e}_r.$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta \qquad \dot{r} = \frac{dr}{dt}$$

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta}$$

composante radiale : $v_r = \dot{r}$: vitesse de changement de la distance.

composante orthoradiale : $v_\theta = r\dot{\theta}$: vitesse de rotation.

$(u.v)' = u'v + uv'$

3) Vecteur accélération

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\dot{r}\vec{e}_r)}{dt} + \frac{d(r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)}{dt}$$

$$= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{d}{dt}(r\dot{\theta})\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \boxed{\dot{\theta}\vec{e}_\theta}.$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \boxed{-\dot{\theta}\vec{e}_r}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}(\dot{\theta}\vec{e}_\theta) + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\vec{e}_r).$$

on regroupe les termes en $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$:

accélération centripète

accélération angulaire

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta.$$

accélération radiale

accélération de Coriolis ($\dot{r}$ et $\dot{\theta}$ non nuls simultanément).

mvt circulaire :

$r = R = cte$

$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$

. $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

. $\vec{a} = R \times \dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + R \times \frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{e}_\theta = R \times \dot{\theta} \times (-\dot{\theta}\vec{e}_r) + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$

cpdcp (ε)

Trajectoire en coordonnées polaires (Exemple : cardioïde).

Équation : $r(\theta) = \frac{1}{2} r_0 (1 + \cos\theta)$.

vitesse $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

accélération $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e_\theta}$.

Applications

calcul de l'abscisse curviligne S.

$$\boxed{S = \int \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta}$$

Pour la cardioïde, $S(\theta) = 2r_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

mouvement à vitesse angulaire constante ($\dot{\theta} = \omega$)

$\ddot{\theta} = 0$.

- $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\omega\,\vec{e_\theta}$.
- $\vec{a} = (\ddot{r} - r\omega^2)\,\vec{e_r} + 2\dot{r}\omega\,\vec{e_\theta}$.