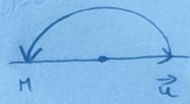
Module et argument

Propriétés

a) Z est un nombre réel $\Leftrightarrow$ $\arg(Z) = 0\ [\pi]$
(Z se trouve sur l'axe des réels)

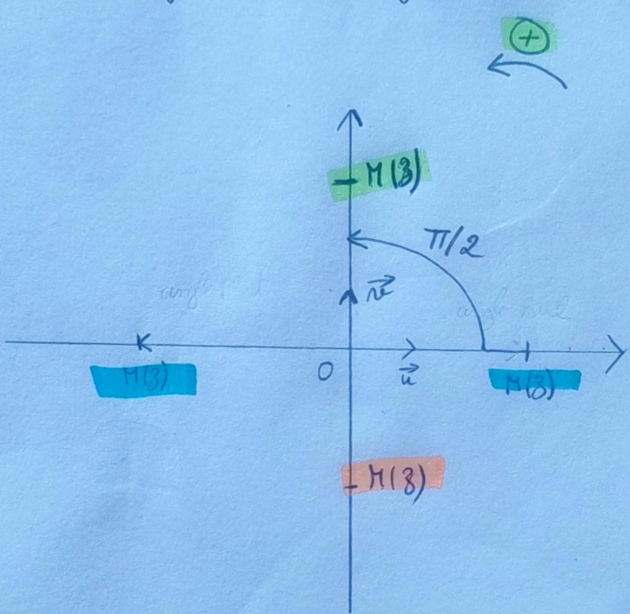
a) • angle $\vec{u}$; $\vec{OM} = 0$;
$\arg(z) = 0\ [\pi]$ ($\arg(z) = 0+\pi$; $0+2\pi$; $0-\pi$; …)
Je peux rajouter ou enlever autant de fois que je veux π à la valeur 0



• angle $\vec{u}$; $\vec{OM} = \pi$
$\arg(z) = \pi$

b) Z est un imaginaire pur, il se trouve sur l'axe des imaginaires $\Leftrightarrow$ $\arg(Z) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

b) $u\hat{O}M = \frac{\pi}{2}$
$u\hat{O}M = \frac{3\pi}{2}$
$\arg(z) = \frac{\pi}{2}$
$\arg(z) = \frac{3\pi}{2}$

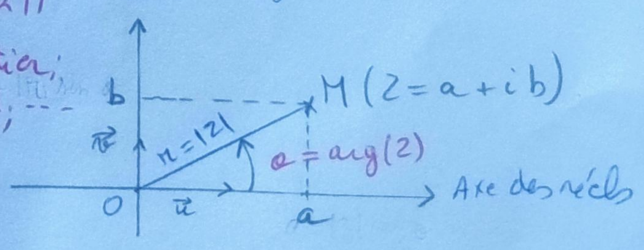


$\arg(z) = 0\ [\pi]$: je peux écrire $\arg(z) = 0+\pi$; $0+2\pi$; $0+3\pi$ - - -

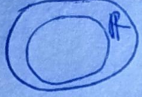
$\arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$; je peux écrire $\arg(z) = \underbrace{\frac{\pi}{2}+\pi}_{\frac{3\pi}{2}}$; $\frac{\pi}{2}+2\pi$; - - -
$\frac{\pi}{2}-2\pi$
$\frac{\pi}{2}-\pi$;

$a = r\cos\theta$
$b = r\sin\theta$
$z = a + ib$
$Z = r\cos\theta + ir\sin\theta$
$Z = |Z|\cos\theta + i|Z|\sin\theta$

$|Z| = \sqrt{a^2+b^2}$
$\arg(Z) = \theta + 2k\pi$
k est un nb entier ;
$\frac{1}{2}$; 1 ; $\frac{3}{2}$; 2 ; $\frac{5}{2}$; - - -



$\mathbb{C}$ $\quad i^2 = -1$



réel $\quad$ imaginaire

$\mathbb{C} : z = a + ib$ $\leftarrow$ ordonnée

$\uparrow$ absaisse

image de $z \rightarrow \times M(a;b)$.

$r = \|\vec{OM}\|$; $r = |z|$

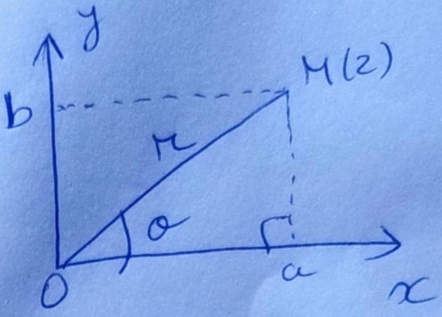
θ : argument de z.

$z = a + ib$ est l'affixe du point M du plan et affixe du vecteur $\vec{OM}$

$z = R\cos\theta + iR\sin\theta$.

$z = R(\cos\theta + i\sin\theta)$.

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$



$\vec{OM}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$

$\cos\theta = \frac{a}{r}$; $a = r\cos\theta$.

$\sin\theta = \frac{b}{r}$; $b = r\sin\theta$.

$a \rightarrow r\cos\theta$

$b \rightarrow r\sin\theta$

$z = a + ib$.

$\vec{OM}\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix}$

$r = \|\vec{OM}\| = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\mathrm{Arg}(z) = \theta + 2k\pi$

$|z_2| = \sqrt{(-4)^2+6^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = \sqrt{2^2\times 13} = 2\sqrt{13}$

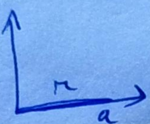
$\boxed{\sqrt{a^2} = a}$

$$\begin{array}{r|l} 52 & 2 \\ 26 & 2 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$52 = 2^2 \times 13$

Décomposition en nombres premiers

$r = |z_3| = 4 = \overset{a}{4} + \overset{b}{0}i$



$z_3 = 4$

$a = r\cos\theta = 4 \Rightarrow \cos\theta = 1$

$b = r\sin\theta$

$\theta = \arccos(1) / \cos^{-1}(1)$

$\Rightarrow \theta = 0.$

$\Rightarrow Arg(z_3) = 0 + 2k\pi$

$\sin\theta = x$

$\Rightarrow \theta = \arcsin(x)$

$\cos\theta = x$

$\Rightarrow \theta = \arccos x$

$z_7 = -5i = \overset{a}{0}\ \overset{b}{-5}i$

* $r = |z_7| = \sqrt{(-5)^2} = 5$

$b = -5 = r\sin\theta$; $\sin\theta = \frac{-5}{r} = \frac{-5}{5} = -1$

$\Rightarrow \sin\theta =$ $\theta = \arcsin(-1) =$

$z = a + ib$ a et b : deux nombres réels.

$M(a;b)$ est l'image de z $\quad$ z est l'affixe de M

$\vec{OM}(a;b)$ image de z. $\quad$ z est l'affixe de $\vec{OM}$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

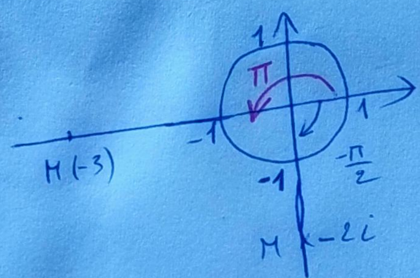
$\arg(z)$ = mesure en rad de l'angle θ entre (Ox) et (OM)

$z_1 = -2i$; $|z_1| = \sqrt{(-2)^2} = 2$.

$\arg(z) = \theta$

$z_2 = -3$

$|z_2| = |-3| = 3$



$r = \|\vec{OM}\| = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

$z = r\cos\theta + ir\sin\theta$

$a = r\cos\theta$

$b = r\sin\theta$

Forme exponentielle d'un nombre complexe

nb complexe

Pour tout réel θ : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \sqrt{1} = 1$

$\arg(e^{i\theta}) = \theta$

- Forme algébrique : $z = a + ib$.
- Forme trigonométrique : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $= |z|(\quad)$
- Forme exponentielle : $z = re^{i\theta}$ $= |z|e^{i\theta}$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$e^{i\pi} = -1$

$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i\times 0 = -1.$

$e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + i\times 0 = 1$

$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i\times 1 = i$

Tout nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ s'écrit sous sa forme exponentielle $z = re^{i\theta}$

1) Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle.

Ecrire le nombre $z = 3 - 3i$ sous une forme exponentielle

il faut écrire z sous la forme $z = |z|e^{i\theta}$

- $|z| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = \sqrt{9\times 2} = 3\sqrt{2}$

- chercher $\theta = \arg(z)$

$\frac{z}{|z|} = \frac{3-3i}{3\sqrt{2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} - \frac{3}{3\sqrt{2}}i$

$e^{i\theta}$

il faut faire apparaître θ

$\frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ je regarde le tableau

je ne vois pas ça dans le tableau

$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Je cherche un θ tel que $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

D'après le cercle trigonométrique ;

$\Rightarrow \frac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta$

$\theta = -\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow z = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

exp. 1

alors je donne maintenant la forme trigonométrique :

$$z = |z| (\cos\theta + i \sin\theta).$$

on a : $\frac{z}{|z|} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right).$

$$z = |z| \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + |z|\, i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z = |z| \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

exp. 2

$$z = |z|\, e^{i\alpha} \qquad e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

$$z = r.\, e^{i\alpha} \qquad |e^{i\alpha}| = 1.$$

$$z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$|z_1| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1.$$

α ?

$$\frac{z_1}{|z_1|} = \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

D'après le tableau c'est $\frac{\pi}{3}$ $\begin{cases} \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

$$\Rightarrow z_1 = r.\, e^{i\alpha}$$

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

$$z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|z_3| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1.$$

$$\frac{z_3}{|z_3|} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$ tableau :

$z_1 = 2 - 3i$

$|z_1| = \sqrt{2^2 + 9} = \sqrt{13} = r$

$a = r \cdot \cos\alpha \Rightarrow 2 = \sqrt{13} \cdot \cos\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = \underline{56{,}301^\circ}$

$b = r \sin\alpha \Rightarrow -3 = \sqrt{13} \cdot \sin\alpha$

$\Rightarrow \sin\alpha = -\frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \alpha = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{-3}{\sqrt{13}}\right) =$

$z_8 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$|z_8| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1.$

$a = r \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$

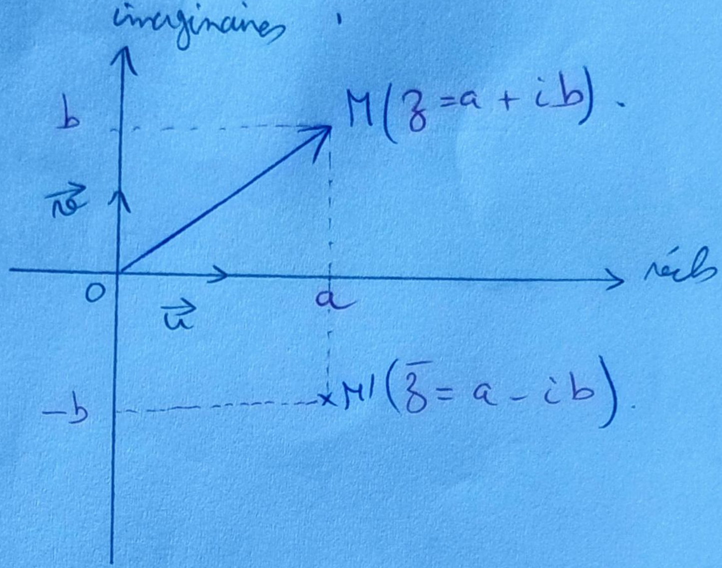
$b = r \cdot \sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$

$z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$. $|z_2| = 1.$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right) \alpha = -\frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

5) conjugé

$z = a + ib$; $\bar{z} = a - ib$



$\bar{\bar{z}} = z$ $\qquad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$

$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$ $\qquad \overline{z^n} = \bar{z}^n$

$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$, $z \neq 0$ $\qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$, $z' \neq 0$.

z est réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$

z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$

$|z^n| = |z|^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$

$|zz'| = |z|\,|z'|$

$\arg(z z') = \arg(z) + \arg(z')$

$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ si $z \neq 0$.

$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$ si $z \neq 0$.

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ si $z' \neq 0$

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z)$ si $z \neq 0$.

$\arg(z^n) = n \arg(z)$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

$\left(e^{ix}\right)^n = e^{inx}$

$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$. Euler

$e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$

$\Rightarrow e^{inx} = (\cos x + i\sin x)^n$

Formule de Moivre :

$(\cos x + i\sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$

$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x)$

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$.

$e^{ix} + e^{-ix} = \cos(x) + \cos(-x) + i\sin(x) + i\sin(-x)$

$= \cos(x) + \cos(x) + i\cancel{\sin(x)} - i\cancel{\sin(x)}$

$\Rightarrow e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos(x)$

$\Rightarrow \boxed{\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}}$ Euler

$e^{ix} - e^{-ix} = \cos x + i\sin x - \left(\cos(-x) + i\sin(-x)\right)$

$= \cos x + i\sin x - \cos(-x) - i\sin(-x)$

$= \cos x + i\sin x - \cos x - (-i\sin x)$

$= \cancel{\cos x} + i\sin x - \cancel{\cos x} + i\sin x$.

$\Rightarrow e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x$

$\Rightarrow \boxed{\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}$ Euler

$$z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow z_3 = r e^{i\theta}$$

$$|z_3| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

$\theta = ?$

$a = r\cos\theta$

$b = r\sin\theta$

$$\frac{z_3}{|z_3|} = \frac{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{z_3}{|z_3|} &= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \cos\theta + i\sin\theta\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}\cos\theta &= -\frac{1}{2} \\ \sin\theta &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\} \theta = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\Rightarrow z_3 = e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$\frac{z_3}{|z_3|} =$$

$$z_4 = 2 + 2i$$

$$|z_4| = r = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

$$\frac{z_4}{|z_4|} = \frac{2+2i}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} + i\frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} + i\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\frac{z_4}{|z_4|} = \cos\theta + i\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z_4 = 2\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$z_5 = \sqrt{3} + i$

$|z_5| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2.$

$\frac{z_5}{|z_5|} = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}.$

$= \cos\alpha + i\sin\alpha$

$$z_5 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

$z_6 = -\sqrt{3} - i$

$|z_6| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2.$

$\frac{z_6}{|z_6|} = \frac{-\sqrt{3}-i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = -\frac{5\pi}{6}$

$= \cos\alpha + i\sin\alpha.$

$$z_6 = 2e^{-\frac{5\pi}{6}}$$

$$\cos^3 x = (\cos x)^3 = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{i3x} + e^{-i3x} + 3e^{i2x}(e^{-ix}) + 3e^{ix}(e^{-i2x})\right)$$

$e^a \times e^b = e^{a+b}$

$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

$e^0 = 1$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{i3x} + e^{-i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix}\right) = \frac{1 \times 2}{8}\left(\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + 3\,\frac{(e^{ix} + e^{-ix})}{2}\right)$$

$$\cancel{\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3} + \frac{3}{2^2}\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\cos(3x) + 3\cos(x)\right)$$

$$\cancel{\frac{1}{4}(\cos x)^3} + \frac{3}{4}\cos x = \frac{1}{4}\cancel{\left(\cos^3 3x + 3\cos x\right)}$$

- $z = a + ib$
- $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.
- $z = re^{i\theta}$, $|e^{i\theta}| = 1$

$e^{i\pi} = -1$

- $\bar{z} = a - ib$.

$\bar{\bar{z}} = z$

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$

$\bar{z} \times \bar{z} = \bar{z} \times \overline{z'}$

$\overline{z^n} = \bar{z}^n$

$$z \neq 0 \begin{cases} \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}} \end{cases}$$

$z = a \Rightarrow z = \bar{z}$

$z = ib \Rightarrow z = -\bar{z}$

$|zz'| = |z||z'|$

$$z \neq 0 \begin{cases} \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \\ \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |z^n| = |z|^n \quad n \in \mathbb{Z} \\ \arg(z^n) = n \arg(z) \end{cases}$$

$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$

$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$ si $z \neq 0$

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

ligne

Matrice (P, n)

colonne

$A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

Matrice $(2, 2)$.

$a_{11} = 1$
$a_{12} = 2$
$a_{21} = 5$
$a_{22} = 4$.

colonne.

a_{ij}

ligne

1) Types de matrices.

Matrice
- ligne
- colonne
- nulle
- carrée
- diagonale
- identité
- triangulaire >
- triangulaire <
- symétrique
- Transposée

2) opérations sur les matrices.

opérations
- Addition : A et B même type (P, n)
- produit : $A(n, P) \times B(P, q)$
- $\times \lambda$: $\lambda . A = \begin{pmatrix} \lambda . a & \lambda . b \\ \lambda . c & \lambda . d \end{pmatrix}$
- élément neutre : $A . I_n = I_n . A = A$ (I_n et A sont de même dimension carrée).

$$\text{matrice } (\underset{\text{lignes}}{p}, \underset{\text{colonnes}}{n})$$

lignes

colonnes

a_{ij} (ligne i, colonne j)

Matrice ligne : $\begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ une seule ligne.

Matrice colonne : $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ une seule colonne

Matrice nulle : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tous les coefficients sont nuls.

Matrice carrée $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ \pi & 3 \end{pmatrix}$ nb lignes = nb de colonnes.
matrice carrée d'ordre n

2×2

Matrice diagonale ; matrice carrée
Les coefficients situés en dehors de la diagonale sont tous nuls.
Les coefficients de la diagonale peuvent être nuls.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

matrice I_n : $I_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $I_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3 lignes
3 colonnes

2 lignes
2 colonnes.

- Matrice carrée d'ordre 3

- Matrice carrée d'ordre 2.

Matrice triangulaire supérieure → matrice carrée

Pour tout $i > j$; $a_{ij} = 0$

ligne ↑ (i) ; colonne ↑ (j)

$$\begin{array}{c|ccc} & j=1 & j=2 & j=3 \\ \hline i=1 & & & \\ i=2 & & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \\ i=3 & & & \end{array} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

diagonale et tout ce qui est au-dessus

$i = 3$, $j = 2$ $\Rightarrow i > j \Rightarrow \boxed{a_{32} = 0}$

Matrice triangulaire inférieure → matrice carrée

Pour tout $i < j$; $a_{ij} = 0$

$$\begin{array}{c|ccc} & j=1 & j=2 & j=3 \\ \hline i=1 & & & \\ i=2 & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} & \\ i=3 & & & \end{array}$$

$i = 1$, $j = 3$ $\Rightarrow i < j \Rightarrow a_{13} = 0$

diagonale et tout ce qui est au-dessous.

Matrice symétrique → matrice carrée

$a_{ij} = a_{ji}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 17 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Matrice transposée :

lignes → colonnes

colonnes → lignes

$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ $T_A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ $T_B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

2 × 2 ; 3 × 2 ; 2 × 3

$C = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $T_C = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

1×4 $\qquad$ 4×1.

opérations sur les matrices

a) addition de 2 matrices de même type (p, n)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & -10 & 20 \end{pmatrix}$

$(2;3)$ $\qquad$ $(2;2)$ $\qquad$ $(2;3)$.

A + B n'est pas possible

A + C possible.

$$A + C = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+5 & 3+1 \\ 4+2 & 5-10 & 6+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 6 & -5 & 26 \end{pmatrix}$$

b) Multiplication par un scalaire : λ.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\lambda . A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$

c) Le Produit de 2 matrices : n'est possible que si le nb de colonnes de la première = nb de lignes de la deuxième.

$A(n, p)$ et $B(p, q)$.

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ $\qquad$ $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \\ e' & f' \end{pmatrix}$

$A(2, 3)$ $\qquad$ $B(3, 2)$

$$A \times B = \begin{pmatrix} aa' + bc' + ce' & ab' + bd' + cf' \\ da' + ec' + fe' & db' + ed' + ff' \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1^{ere} \text{ ligne de } A \\ \leftarrow 2^{eme} \text{ ligne de } A \end{array}$$

1ere colonne de B   2eme colonne de B.

⚠ Le Produit matriciel n'est pas commutatif

$$AB \neq BA$$

Mais il est associatif $(AB)C = A(BC)$.

et distributif $(A+B)C = AC + BC$ Pas $CA + CB$

élément neutre pour la multiplication des matrices carrées.

- Lorsqu'on multiplie une matrice carrée A par la matrice identité (de même dimension), on obtient la matrice A elle-même.
- une matrice identité est une matrice carrée, notée I_n pour une dimension $n \times n$, qui a des 1 sur la diagonale principale (du coin supérieur gauche au coin inférieur droit) et des 0 partout ailleurs.

Pour toute matrice carrée A de dimension $n \times n$ on a :

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$$

où I_n est la matrice identité de même dimension que A.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2×2 $\qquad$ 2×2

$$A . I_2 = \begin{pmatrix} a\times 1 + b \times 0 & a \times 0 + b \times 1 \\ c \times 1 + d \times 0 & c \times 0 + d \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

$$I_2 . A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times a + 0 \times c & 1 \times b + 0 \times d \\ 0 \times a + 1 \times c & 0 \times b + 1 \times d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow I_2 . A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

Si $A = 0 \Rightarrow AB = 0$ mais la réciproque est fausse.

Si $AB = 0$; A peut être $= 0$ ou $\neq 0$

B peut être $= 0$ ou $\neq 0$

Si $AB = 0$ →
- $A = 0$ et $B \neq 0$
- $A \neq 0$ et $B = 0$
- $A = 0$ et $B = 0$