

Coordonnées Polaires - Cinématique du point

$$x = r \cdot \cos \theta$$

$$y = r \cdot \sin \theta$$

r : distance radiale depuis O
 θ : angle polaire par rapport à l'axe Ox .

Vecteurs unitaires polaires:

$\vec{e}_r$: vecteur radial (direction OM)

$\vec{e}_\theta$: vecteur orthoradial ($\perp$ à $\vec{e}_r$, sens trigonométrique).

Expression en fonction de $\vec{e}_x, \vec{e}_y$:

$$\vec{e}_r = \cos \theta \cdot \vec{e}_x + \sin \theta \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \cdot \vec{e}_x + \cos \theta \cdot \vec{e}_y$$

Dérivées par rapport à θ :

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta$$

$$\frac{d(\cos \theta)}{d\theta} = -\sin \theta; \quad \frac{d(\sin \theta)}{d\theta} = \cos \theta$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r$$

1) Vecteur position

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r$$

2) Vecteur vitesse

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \vec{e}_\theta \times \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_r$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

3) Vecteur accélération

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\dot{r} \vec{e}_r)}{dt} + \frac{d(r \dot{\theta} \vec{e}_\theta)}{dt}$$

$$\vec{a} = \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{d}{dt}(\pi \dot{\theta}) \vec{e}_\theta + \pi \dot{\theta} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r}(\dot{\theta} \vec{e}_\theta) + (\pi \dot{\theta} + \pi \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta + \pi \dot{\theta}(-\dot{\theta} \vec{e}_r)$$

on regroupe les termes en $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - \pi \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\pi \dot{\theta} + \pi \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta$$