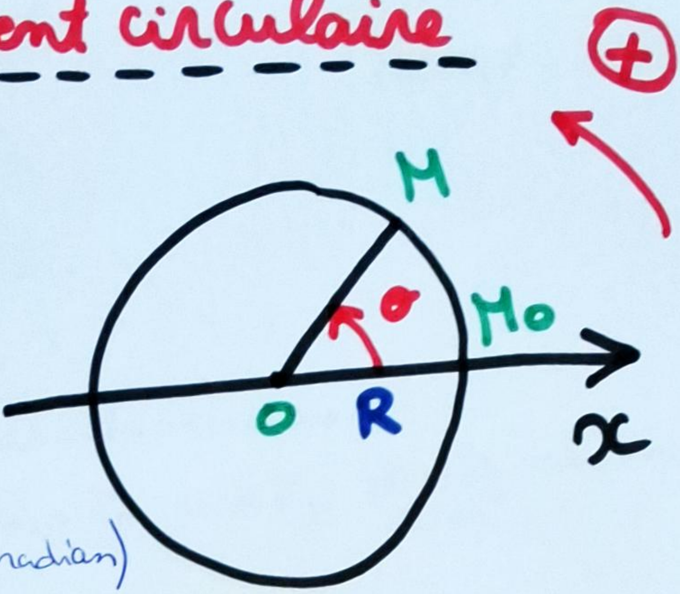
Mouvement circulaire



angle de position

$$M_0M = R\theta$$ (θ en radian)

$$l = R\theta$$

Vitesse angulaire:

on cherche la vitesse angulaire de M

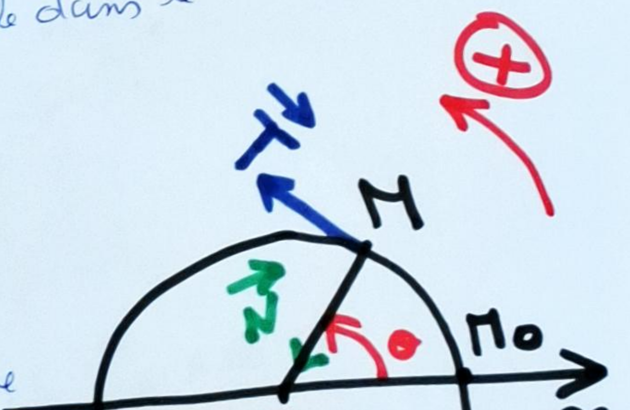
π (rad) = 180°

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad (rad.s^{-1})$$

omega

$\omega > 0$ si M parcourt le cercle dans le sens +

repère de Frenet



Repère $(\vec{T}, \vec{N})$

$\vec{T}$: vecteur unitaire tangent à la trajectoire dans le sens du mouvement.

$\vec{N}$: vecteur unitaire orthogonal ($\perp$) à la trajectoire et orienté vers O (centripète).

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{d\alpha} \times \overbrace{\frac{d\alpha}{dt}}^{\omega} = \omega \vec{N}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Je veux faire apparaître ω

$$\boxed{\omega = \frac{d\alpha}{dt}}$$

Pourquoi $\frac{d\vec{T}}{d\alpha} = \vec{N}$???

En coordonnées polaires, $\vec{T}$ peut s'exprimer comme :

$$\vec{T} = \cos\alpha\, \vec{e_x} + \sin\alpha\, \vec{e_y}$$ ($\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$ vecteurs unitaires fixes)

Et $\vec{N}$; $\vec{N} = -\sin\alpha\, \vec{e_x} + \cos\alpha\, \vec{e_y}$

$$\frac{d\vec{T}}{d\alpha} = (\cos\alpha)'\, \vec{e_x} + (\sin\alpha)'\, \vec{e_y}$$

$$= -\sin\alpha\, \vec{e_x} + \cos\alpha\, \vec{e_y} = \vec{N}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{T}}{d\alpha} = \vec{N}}$$

- Décrit comment $\vec{T}$ change lorsque α varie.

- Comme $\vec{T}$ est unitaire, sa dérivée est nécessairement orthogonale à $\vec{T}$, ce qui correspond à la direction de $\vec{N}$,

Vecteur vitesse :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} \; ; \; d\vec{\ell} = d\ell\, \vec{T}$$

$$d\ell = R\, d\alpha$$

$$\Rightarrow \vec{V} = R\frac{d\alpha}{dt} \cdot \vec{T}$$

$$\vec{V} = \underset{\sqcup}{V}\vec{T} \text{ et } \vec{V} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \underbrace{R\frac{d\alpha}{dt}}\vec{T} \Rightarrow \boxed{\vec{V} = R\omega\vec{T}}$$

$$V = R\frac{d\alpha}{dt} = R\omega \qquad \boxed{V = R\omega}$$

Vecteur accélération :

$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(V\vec{T})}{dt}$

accélération tangentielle

- selon $\vec{T}$, $\vec{a} = \frac{dV}{dt}\vec{T}$; $\boxed{a_T = \frac{dV}{dt}}$

accélération normale

- selon $\vec{N}$, $\vec{a} = V\frac{d\vec{T}}{dt} = V\omega\vec{N}$; $a_N = V\omega$
$= R\omega.\omega$

$\Rightarrow \boxed{a_N = R\omega^2 = \frac{V^2}{R}}$.

Mouvement circulaire uniforme ;

$\omega = cte$.

$\omega = cte = \omega_0 \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \omega_0$

$\Rightarrow \int d\theta = \int \omega_0\, dt$

$\Rightarrow \theta(t) = \omega_0 t + B$?

à $t = 0$; $\theta(0) = \theta_0$.

$\Rightarrow \theta_0 = \omega_0 . 0 + K \Rightarrow K = \theta_0$.

$\Rightarrow \boxed{\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0}$

angle initial à $t=0$ (Position de départ).

angle parcouru pendant le temps t à vitesse constante ω_0

$$\frac{d(V\vec{T})}{dt} = \frac{dV\,\vec{T}}{dt} + \frac{V\,d\vec{T}}{dt}$$

$(u.v)' = u'v + uv'$