Exercice 1.

L'équation en coordonnées polaires d'un objet se déplaçant sur une surface est:

$$r(t) = \frac{1}{2} r_0 (1 + \cos\theta(t))$$

r_0 est une valeur constante.

1) Quelle est l'allure de la trajectoire?

2) Exprimer l'abscisse curviligne, s, du point en fonction de à partir du point A $(\theta = 0)$

3) pour quel angle polaire a-t-on $s = r_0$?

4) En déduire le périmètre de la trajectoire.

5) on choisit comme origine des temps, l'instant où le point est en A et on admets que la trajectoire est décrite avec une vitesse angulaire constante ω
Exprimer la vitesse linéaire du point en fonction de 't' et puis en fonction de "r".

6) Exprimer les composantes et le module de l'accélération de ce mobile.

correction

↓

1) il s'agit d'une cardioïde car son équation polaire est de la forme;

$$\rho = a(1+\cos\theta).$$

2) l'abscisse curviligne s en fonction de θ

$$S = \int_0^\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

1 Calculons $\frac{dr}{d\theta}$:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{d\left[\frac{1}{2} r_0 (1+\cos\theta(t))\right]}{d\theta}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} r_0 \times d\left[1+\cos\theta(t)\right]}{d\theta}$$

$$= \frac{1}{2} r_0 (-\sin\theta(t))$$

$$\Longrightarrow \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{2} r_0 \sin\theta$$

2 substituons r et $\frac{dr}{d\theta}$:

$$S = \int_0^\theta \sqrt{\left(\frac{1}{2} r_0 (1+\cos\theta)\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} r_0 \sin\theta\right)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^\theta \sqrt{\frac{1}{2} r_0 \left[(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta\right]}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} r_0 \int_0^\theta \sqrt{1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}\, d\theta$$

$$\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$$

Physics and chemistry club

$$\boxed{1 + \cos\theta = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} r_0 \int_0^\theta \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} r_0 \int_0^\theta \sqrt{2(1+\cos\theta)}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} r_0 \int_0^\theta \sqrt{2 \times 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} r_0 \int_0^\theta \cancel{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

pour $\theta \in [0, \pi]$

$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \geq 0$

$\Rightarrow \sqrt{2 + 2\cos\theta} =$

$2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$$= r_0 \int_0^\theta \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

Posons $u = \frac{\alpha}{2}$

$$du = \frac{1}{2}\, d\alpha \quad \text{et} \quad d\alpha = 2\, du.$$

Les bornes deviennent :

Pour $\alpha = 0$; $u = 0$

Pour $\alpha = \alpha$; $u = \frac{\alpha}{2}$

$$\Rightarrow \quad S = r_0 \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \cos(u) \times 2\, du$$

$$\boxed{\int \cos \alpha = \sin \alpha}$$

$$= 2 r_0 \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \cos(u)\, du$$

$$= 2 r_0 \left[\sin(u)\right]_0^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$= 2 r_0 \left[\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin(0)\right]$$

$$= 2 r_0 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S(\alpha) = 2 r_0 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

3) angle Polaire pour $S = r_0$

$$S(\theta) = 2\cancel{r_0} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cancel{r_0}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Chers étudiantes, chers étudiants.

Corrigé des questions 4, 5 et 6 sur demande.

Merci d'avoir consulter physics & chemistry club.